e/n/s/t/i/b
27, rue du Merle Blanc - B.P. 1041
88051 Épinal Cedex 9
Tél. : 03.29.81.11.50 Fax : 03.29.34.09.76

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES TECHNOLOGIES ET INDUSTRIES DU BOIS

Entrée en 1ère année

CONCOURS B (Spé BCPST)

PARTIE I

Soit p un nombre réel différent de 1/2 ($p \neq 1/2$). On désigne par $\mathcal{U}$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant pour tout $n \geq 0$

$$(R) \qquad pu_{n+2} - u_{n+1} + (1-p)u_n = 0$$

1.– Démontrer que l'ensemble $\mathcal{U}$ n'est pas vide (on pourra exhiber une suite particulière très simple).

2.– Soient $(u'_n)_{n\geq 0}$ et $(u''_n)_{n\geq 0}$ deux suites de $\mathcal{U}$ et λ' et λ'' deux réels et soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie pour tout $n \geq 0$ par

$$u_n = \lambda' u'_n + \lambda'' u''_n.$$

a) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ appartient à $\mathcal{U}$.

b) En déduire que $\mathcal{U}$ est un espace vectoriel.

3.–

a) Démontrer que toute suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de $\mathcal{U}$ est entièrement déterminée par la donnée de u_0 et u_1. (Raisonnement par récurrence).

b) Soient les deux suites $(v_n)_{n\geq 0}$ et$(w_n)_{n\geq 0}$ de $\mathcal{U}$ déterminées par

$$v_0 = 1 \qquad w_0 = 0$$
$$v_1 = 0 \qquad w_1 = 1$$

Démontrer que ces deux suites forment une base de $\mathcal{U}$ et que l'espace $\mathcal{U}$ est de dimension 2.

4.–

a) Déterminer des suites non nulles de $\mathcal{U}$ de la forme:

$$u_n = \lambda^n \qquad \forall n \geq 0$$

En déduire une nouvelle base de $\mathcal{U}$. Exprimer toute suite de $\mathcal{U}$ en fonction de cette base.

b) Soit N un entier strictement positif. Déterminer les suites $(p_n)_{n\geq 0}$ et $(q_n)_{n\geq 0}$ de l'espace $\mathcal{U}$ telles que

$$p_0 = 0 \qquad q_0 = 1$$
$$p_N = 1 \qquad q_N = 0$$

5.– Dans cette question, on suppose que $p = 1/2$. Vérifier que les deux suites définies ci-dessous appartiennent à $\mathcal{U}$:

$$v_n = 1 \quad \forall n \geq 0 \qquad w_n = n \quad \forall n \geq 0.$$

En déduire les suites $(p_n)_{n\geq 0}$ et $(q_n)_{n\geq 0}$ définies dans la question **4.**–b) mais pour $p = 1/2$.

PARTIE II

Soit N un entier strictement positif, a un entier compris entre 0 et N et p un réel vérifiant $0 < p < 1$, $p \neq 1/2$, et soit $q = 1 - p$. Une particule, située au début du processus au point d'abscisse a se déplace sur un axe aléatoirement par sauts successifs indépendants les uns des autres d'amplitude $(+1)$ avec la probabilité p et (-1) avec la probabilité q. Si x_n est l'abcsisse de la particule à l'issue du n^e saut, alors:

$$x_0 = a \qquad x_{n+1} = \begin{cases} x_n + 1 & \text{avec la probabilité } p \\ x_n - 1 & \text{avec la probabilité } q. \end{cases}$$

Le processus s'arrête dès que la particule atteint l'une des extremités du segment $[0, N]$. Il s'arrête en 0 s'il atteint l'extrémité 0; il s'arrête en N s'il atteint l'extrémité N.

1.– Soit q_a la probabilité que le processus s'arrête en 0. On a en particulier $q_0 = 1$ (la particule étant en 0 dès le début, le processus ne démarre pas, la particule stationne en 0).
De même, on a $q_N = 0$ (la particule, issue de N, reste en N, ne démarre donc pas, et le processus ne s'arrêtera pas en 0).

a) Montrer que pour tout a tel que $1 \leq a \leq N - 1$, on a

$$q_a = pq_{a+1} + qq_{a-1}$$

b) En utilisant la question **I 4.**–b), exprimer q_a en fonction de a, N, p et q.

2.– De même, calculer la probabilité p_a que le processus s'arrête en N.

3.– Calculer la somme $p_a + q_a$. En déduire la probabilité que le processus ne s'arrête pas, c'est à dire que $1 \leq x_n \leq N - 1$ pour tout $n \geq 0$.

4.– Résoudre les questions précédentes dans le cas où $p = 1/2$.